

§ 6. Непротиворечивость S^1

Система S^1 непротиворечива в смысле следующих метатеорем:

MT1. Если $x \vdash y$ есть теорема S^1 и при этом x не есть противоречие, то $x \vdash \sim y$ не есть теорема S^1 (недоказуема в S^1).

MT2. Если $x \vdash \sim yy$ есть теорема S^1 , то x есть противоречие.

Доказательство *MT1.* Так как $x \vdash y$ есть теорема S^1 , то на основании *MT1* предшествующего параграфа она есть тавтология. При этом, поскольку $\sim x$ не является тавтологией, высказывание x принимает значение 1 по крайней мере при одной комбинации значений входящих в него элементарных высказываний. Из интерпретации знака \vdash следует, что высказывание y при той же комбинации значений элементарных высказываний также принимает значение 1. Тогда высказывание $\sim y$ при этой комбинации значений элементарных высказываний имеет значение 0. Поэтому при данной комбинации значений входящих в x элементарных высказываний формула следования $x \vdash \sim y$ принимает значение 0. Следовательно, она не является тавтологией. Поэтому, в силу *MT1* предшествующего параграфа она не есть теорема S^1 .

Справедливость *MT2* видна из следующего: $\sim yy$ есть противоречие, т. е. всегда имеет значение 0; согласно *MT3* предшествующего параграфа x всегда имеет значение 0, т. е. есть противоречие.